

AAK Cheatsheet – Problem-Arsenal

Referenz: Definition · Beispiel · Reduktion · Konstruktion · ETH · Beweisidee je Richtung

Reduktionsbaum (Kurs):

$\text{SAT} \leq_p \text{3-SAT} \leq_p k\text{-CLIQUE} \leq_p \text{INDEPENDENTSET}, \text{VERTEXCOVER} \leq_p \text{FVS}, \Delta\text{COVER}$
 $\text{3-SAT} \leq_p \text{HITTINGSET} \leq_p \text{SETCOVER}; \quad \text{3-SAT} \leq_p \text{DOMINATINGSET}, k\text{-COLOR} \leq_p \text{COVERCLIQUE}$
 $\text{SAT} \leq_p \text{3-DM} \leq_p \text{3-EXACTCOVER} \leq_p \text{SUBSETSUM} \leq_p \text{PARTITION} \leq_p P2 \parallel C_{\max}; \quad \text{SUBSETSUM} \leq_p \text{KNAPSACK}$
 $\text{VERTEXCOVER} \leq_p \text{HAMILTONIANCYCLE} \leftrightarrow \text{HAMILTONIANPATH}; \quad \text{HC} \leq_p \text{TSP}$
 $\text{3-SAT} \leq_p \text{NAE-4-SAT} \leq_p \text{SETSPLITTING}; \quad k\text{-CLIQUE} \leq_p \text{GRIDTILING}, 2|\text{prec}|C_{\max}$

Quellen-Wahl bei fremdem Problem: Zahlen/Summen $\rightarrow$ SUBSETSUM/PARTITION · Knoten-Auswahl $\rightarrow$ CLIQUE/VC/IS · Touren/Reihenfolgen $\rightarrow$ HC/HP · Färbung/Partition in Klassen $\rightarrow$ k -COLOR · Mengensysteme $\rightarrow$ HITTINGSET/3-EXACTCOVER · Scheduling $\rightarrow$ PARTITION/ $P2 \parallel C_{\max}$ · Zusatzeigenschaft auf bekanntem Problem $\rightarrow$ vom Grundproblem reduzieren, Eigenschaft per Gadget erzwingen.

SAT

Def: KNF-Formel φ ; existiert erfüllende Belegung?

Bsp: $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{y})$ – ja: $x=0, y=0, z=1$.

Reduktion: Basis (Cook–Levin: jede NP-Sprache $\leq_p$ SAT).

ETH: über 3-SAT-Schranken.

Rolle: Startpunkt; Klauseln beliebig lang – Vorsicht: SS24-Klausur verlangte $\text{SAT} \leq_p k\text{-CLIQUE}$, nicht 3-SAT!

3-SAT

Def: KNF, jede Klausel ≤ 3 Literale; erfüllbar?

Bsp: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ – ja: $x_1=1, x_2=0$.

Reduktion: von SAT.

Konstruktion: Lange Klausel $(\ell_1 \vee \dots \vee \ell_k)$ mit frischen y_i zerhacken: $(\ell_1 \vee \ell_2 \vee y_1)(\bar{y}_1 \vee \ell_3 \vee y_2) \dots$

$\Rightarrow$: Erfülltes ℓ_j wählen, y -Kette davor wahr, danach falsch setzen.

$\Leftarrow$: Wären alle ℓ_j falsch, erzwingt die y -Kette einen Widerspruch (Dominoeffekt).

ETH: nicht in $2^{o(n)}$; per **Sparsification-Lemma** auch nicht in $2^{o(m)}$. Merke: $n \leq 3m$.

k -CLIQUE

Def: Graph G , Zahl k ; existiert paarweise verbundene Knotenmenge $|C| \geq k$?

Bsp: Dreieck $\{1, 2, 3\}$ plus Kante $\{3, 4\}$: $k=3$ ja, $k=4$ nein.

Reduktion: von SAT (Vorlesung).

Konstruktion: Knoten = Paare (Klausel C_j , Literal $\ell \in C_j$); Kante zwischen Paaren verschiedener Klauseln, außer $\ell = \bar{\ell}'$; $k = m$.

$\Rightarrow$: Erfüllende Belegung: pro Klausel ein wahres Literal wählen – paarweise kompatibel $\rightarrow m$ -Clique.

$\Leftarrow$: m -Clique hat je Klausel genau einen Knoten; Literale widerspruchsfrei $\rightarrow$ Belegung erfüllt alle Klauseln.

ETH: $|V| = O(m)$, $|E| = O(m^2)$, $k = m \Rightarrow$ nicht in $2^{o(|V|)}$, $2^{o(\sqrt{|E|})}$, $2^{o(k)}$.

k -INDEPENDENTSET

Def: Existieren k paarweise *nicht* verbundene Knoten?

Bsp: Pfad 1–2–3–4: $\{1, 3\}$ oder $\{1, 4\}$, $k=2$ ja.

Reduktion: von k -CLIQUE.

Konstruktion: Komplementgraph $\bar{G}$, gleiches k .

$\Rightarrow$: Clique in G = keine Kanten in $\bar{G}$ = IS.

$\Leftarrow$: IS in $\bar{G}$ = alle Paare Kanten in G = Clique.

ETH: $|V|$ gleich, $|E| \leq |V|^2 \Rightarrow$ nicht in $2^{o(|V|)}$, $2^{o(\sqrt{|E|})}$.

VERTEXCOVER

Def: Existiert S , $|S| \leq k$, die jede Kante mit einem Endpunkt trifft?

Bsp: Stern (Zentrum z , 4 Blätter): $S = \{z\}$, $k=1$ ja.

Reduktion: von k -CLIQUE (Präsenz 10.2).

Konstruktion: $\bar{G}$ und $k' = n - k$.

$\Rightarrow$: Clique C in $G \rightarrow V \setminus C$ deckt $\bar{G}$: in $\bar{G}$ gibt es keine Kante innerhalb C .

$\Leftarrow$: VC V' in $\bar{G} \rightarrow V \setminus V'$ ist IS in $\bar{G}$ = Clique in G , Größe $\geq n - (n - k) = k$.

ETH: $|V'| = |V|$, $|E'| \leq |V|^2$, $k' \leq |V| \Rightarrow$ nicht in $2^{o(|V|)}$, $2^{o(\sqrt{|E|})}$, $2^{o(k)}$.

FEEDBACKVERTEXSET (gerichtet)

Def: $X \subseteq V$, $|X| \leq k$, sodass $G \setminus X$ kreisfrei.

Bsp: Kreis $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$: $X = \{1\}$, $k=1$ ja.

Reduktion: von VERTEXCOVER (HA 10.1).

Konstruktion: Jede Kante $\{u, v\}$ durch beide Richtungen $(u, v), (v, u)$ ersetzen; k übernehmen.

$\Rightarrow$: VC entfernt $\rightarrow$ keine Kanten mehr $\rightarrow$ kreisfrei.

$\Leftarrow$: Wäre Kante $\{u, v\}$ ungedeckt, bildet (u, v, u) einen 2-Kreis – Widerspruch.

Δ COVER (Dreiecksüberdeckung)

Def: C_Δ , $|C_\Delta| \leq k$: jedes Dreieck enthält einen Knoten aus C_Δ .

Bsp: Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante $\{u, v\}$: $C_\Delta = \{u\}$, $k=1$ ja.

Reduktion: von VERTEXCOVER (HA 11.1).

Konstruktion: Pro Kante $e = \{u, v\}$ neuer Knoten v_e mit Kanten zu u, v – jede Kante wird Dreieck; k übernehmen.

$\Rightarrow$: VC trifft jede Kante, also jedes Alt-Dreieck *und* jedes neue Dreieck $\{u, v, v_e\}$. **Achtung Korrektur H11:** auch Dreiecke, die schon in G lagen, explizit abdecken!

$\Leftarrow$: ObdA $C_\Delta \subseteq V$ (v_e durch e_1 tauschen, deckt weiter); dann trifft C_Δ jedes $\{u, v, v_e\}$, also jede Kante.

ETH: $|V'| = |V| + |E| \leq 2|V|^2$, $|E'| = 3|E| \Rightarrow$ nicht in $2^{o(\sqrt{|V'|})}$, $2^{o(\sqrt{|E'|})}$ (aus VC-Schranken).

HAMILTONIANCYCLE (HC)

Def: Kreis, der jeden Knoten genau einmal besucht?

Bsp: C_5 (Fünfeck): ja. $K_{1,3}$ (Stern): nein.

Reduktion: von VERTEXCOVER (Vorlesung) – **Konstruktion nie selbst gefordert. Nur als Fakt zitieren.**

Als Quelle: für $HP \leftrightarrow HC$, TSP, Hitchhiker's, LONGESTPATH ($k = n-1$).

HAMILTONIANPATH (HP) $\leftrightarrow$ HC

Def: Pfad, der jeden Knoten genau einmal besucht?

HP von HC: Wähle v ; füge Kopie v^* (gleiche Nachbarn) plus Grad-1-Knoten s an v , t an v^* an.

$\Rightarrow$: HC bei v aufschneiden $\rightarrow$ Pfad $s, v, \dots, v^*, t$.

$\Leftarrow$: Pfad muss s, t als Enden haben; $v \dots v^*$ zusammenkleben ergibt HC.

HC von HP: Neuen Universalknoten u (mit allen verbunden) hinzufügen.

$\Rightarrow$: Pfad + u am Anfang/Ende schließt Kreis.

$\Leftarrow$: HC ohne u ist Pfad über alle Altknoten.

TSP (Entscheidung) + Inapproximierbarkeit

Def: Vollständiger Graph mit Distanzen, Budget T ; Rundreise $\leq T$?

Bsp: 4 Städte im Quadrat, Seitenlänge 1: OPT = 4.

Reduktion: von HC.

Konstruktion: $d(u, v) = 1$ falls $\{u, v\} \in E$, sonst 2; $T = n$. (Erfüllt sogar Δ -Ungleichung!)

$\Rightarrow$: HC $\rightarrow$ Tour aus lauter 1er-Kanten, Länge n .

$\Leftarrow$: Tour $\leq n$ kann keine 2er-Kante nutzen $\rightarrow$ alle Kanten in $E \rightarrow$ HC.

Inapprox (SS23!): Nicht-Kanten stattdessen = $\alpha n + 1$. Ein α -Approx-Algorithmus gäbe Tour $\leq \alpha n$ gdw. HC existiert $\rightarrow$ entscheidet HC in Polyzeit $\rightarrow P = NP$. Für kein α Güte möglich, außer $P = NP$.

k -COLOR

Def: Färbung $f : V \rightarrow [k]$ mit $f(u) \neq f(v)$ für Kanten?

Bsp: C_5 : 3 Farben nötig; C_4 : 2 reichen.

Reduktion: von 3-SAT – in Klausuren stets gegeben, nie selbst konstruieren. Nur Parameter zählen!

ETH: nicht in $2^{o(|V|)}$ (stand SS25 als Hinweis dabei); Parameter der SS24-Reduktion: $|V| = O(n + m)$, $|E| = O(n^2 + nm) \Rightarrow$ nicht in $2^{o(\sqrt{|E|})}$.

Als Quelle: NP-vollständig zitieren für: PRECOLORING, COVERCLIQUE, 3-COLOR-Varianten.

k -COLOR-PRECOLORING

Def: Zusätzlich: vorgegebene Knoten $v_1, \dots, v_k$ mit $f(v_i) = i$.

Reduktion: von k -COLOR.

Konstruktion: Füge frische Clique $v_1, \dots, v_k$ hinzu (untereinander verbunden, sonst isoliert); precolore $f(v_i) = i$.

$\Rightarrow$: k -Färbung von G bleibt gültig; neue Clique bekommt Farben 1.. k per Definition.

$\Leftarrow$: Einschränkung der Precoloring-Färbung auf G ist k -Färbung.

Merke: Verifizierer braucht $v_1, \dots, v_k$ als Teil der *Eingabe* (Klausur-Korrektur!) und muss ALLE Knoten prüfen, nicht nur C .

COVERCLIQUE

Def: k paarweise disjunkte Cliquen, die V überdecken?

Bsp: C_4 (Viereck): 2 Cliquen (gegenüberliegende Kanten) – ja für $k=2$.

Reduktion: von k -COLOR (SS25-Klausur).

Konstruktion: Komplementgraph $\bar{G}$, gleiches k .

$\Rightarrow$: Farbklassen sind IS in G = Cliquen in $\bar{G}$; disjunkt, überdecken V .

$\Leftarrow$: Cliquen in $\bar{G}$ = IS in $G \rightarrow$ als Farbklassen nutzen.

ETH: $|V|$ gleich $\Rightarrow$ nicht in $2^{o(|V|)}$; $|\bar{E}| \leq |V|^2 \Rightarrow$ nicht in $2^{o(\sqrt{|E|})}$.

3-DIMENSIONALMATCHING (3-DM)

Def: Disjunkte Mengen W, X, Y ($|W|=|X|=|Y|=q$), Tripel $T \subseteq W \times X \times Y$; q disjunkte Tripel, die alles überdecken?

Bsp: Ehe-Analogie mit 3 Geschlechtern: perfekte Dreier-Zuordnung.

Reduktion: von SAT (Vorlesung; auf 3-SAT-Instanzen anwenden für ETH) – **Konstruktion nie selbst gefordert. Nur Parameter und Kette merken.**

ETH: $|W| = O(mn) \leq O(m^2)$, $|T| = O(m^2 n^2) \leq O(m^4) \Rightarrow$ nicht in $2^{o(\sqrt{|W|})}$, $2^{o(\sqrt[4]{|T|})}$.

Rolle: Glied der Kette zu X3C $\rightarrow$ SUBSETSUM (Präsenz 13.1).

3-EXACTCOVER (X3C)

Def: Grundmenge U ($|U| = 3q$), 3er-Mengen F ; exakte Überdeckung durch disjunkte Mengen?

Reduktion: von 3-DM (Spezialfall: Tripel als 3er-Mengen über $U = W \dot{\cup} X \dot{\cup} Y$).

$\Rightarrow$: /

$\Leftarrow$: identisch – 3-DM ist eine X3C-Instanz.

ETH: $|U| = 3q$, $|F| = |T| \Rightarrow$ nicht in $2^{o(\sqrt{|U|})}$, $2^{o(\sqrt[4]{|F|})}$.

SUBSETSUM

Def: Größen $a_1, \dots, a_n$, Ziel T ; Teilmenge mit Summe genau T ?

Bsp: $\{3, 5, 7, 11\}$, $T = 12$: ja ($5 + 7$).

Reduktion 1: von X3C (Vorlesung): Menge $F_i \rightarrow$ Zahl $\sum_{u \in F_i} (|F|+1)^u$, $T = \sum_u (|F|+1)^u$ – Basis verhindert Überträge.

Reduktion 2: von 3-SAT (SS23-Klausur, Basis 10): $s(a_i) = 10^{i-1} + \sum_{x_i \in C_j} 10^{n+j-1}$, analog b_i für $\bar{x}_i$; Slack $c_j, d_j = 10^{n+j-1}$; Ziel: Variablenziffern 1, Klauselziffern 3.

$\Rightarrow$: Belegung: pro Variable a_i oder b_i wählen; Klauselziffer wird 1..3, Slacks füllen auf 3.

$\Leftarrow$: Keine Überträge (Basis groß genug) $\rightarrow$ Variablenziffer erzwingt genau ein Item pro Paar; Klauselziffer 3 braucht ≥ 1 echtes Literal-Item (Slacks geben nur 2).

ETH: bzgl. Itemzahl: nicht in $2^{o(\sqrt[4]{n})}$ (via X3C). Bzgl. d (verschiedene Größen) und $L = \log \Delta$ (SS23!): beide $O(n + m) \Rightarrow$ nicht in $2^{o(d)}$, nicht in $2^{o(L)}$.

SUBSETSUM-Varianten (Padding-Trickkasten)

Cardinality ($|S| = n/2$): Präsenz 11.3: $c'_i = c_i + 1$, plus n Einser-Items, $T' = T + n$.

$\Rightarrow$: Lösung S mit Einsern auf Größe n auffüllen.

$\Leftarrow$: Einser-Items gleichen Kardinalität aus, Kern bleibt.

($a_1 = 1$): Alle Größen $\times 2$, ein 1-Item dazu, $T' = 2T$: Parität verhindert Nutzung der 1.

Teilbar durch 3 oder 7: Alle Größen und T mit 21 multiplizieren.

Ohne Zweierpotenzen: Alle $\times 3$: $3a$ ist nie 2^k (ungerader Faktor); $T' = 3T$.

AtMostTwoPerSize: **Kam SS24 als eigene Aufgabe – Konstruktion können! [Skizze – Detail selbst prüfen]** Idee: Vielfachheit c einer Größe binär bündeln: Items $a, 2a, 4a, \dots$ je einmal – alle Teilsummen $0..ca$ erreichbar. Gegen Musterlösung prüfen.

Muster: Immer: Ja-Instanzen exakt erhalten, Eigenschaft durch Skalierung/Padding erzwingen, Zieltransformation angeben.

PARTITION

Def: Zahlen in zwei Hälften gleicher Summe teilen?

Bsp: $\{1, 2, 3, 4\}$: $\{1, 4\} | \{2, 3\}$ – ja.

Reduktion: von SUBSETSUM ($A = \sum a_i$).

Konstruktion: Zwei Zusatz-Items $2A - T$ und $A + T$; Gesamtsumme $4A$, Hälfte $= 2A$.

$\Rightarrow$: Lösung S : Seite $S \cup \{2A - T\}$ hat $T + 2A - T = 2A$.

$\Leftarrow$: Zusatz-Items nie zusammen ($3A > 2A$); Seite mit $2A - T$ enthält Items der Summe T .

$P2 \parallel C_{\max}$ (2 Maschinen)

Def: Jobs auf 2 Maschinen, Makespan $\leq T$?

Reduktion: von PARTITION: Jobs = Zahlen, $T = \frac{1}{2} \sum p_j$.

$\Rightarrow$: Partition = perfekt balancierter Schedule.

$\Leftarrow$: Makespan $\frac{1}{2} \sum$ erzwingt exakte Balance.

KNAPSACK (Entscheidung)

Def: Gewichte w_i , Profite p_i , Kapazität K , Zielprofit P .

Reduktion: von SUBSETSUM: $w_i = p_i = a_i$, $K = P = T$.

$\Rightarrow$: /

$\Leftarrow$: Summe $= T$ gdw. Gewicht $\leq T$ und Profit $\geq T$ gleichzeitig.

HITTINGSET

Def: Universum U , Mengen $F_1, \dots, F_r$, Zahl k ; H , $|H| \leq k$, trifft jede F_i ?

Bsp: $U = \{1..5\}$, $F = \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$: $H = \{2, 4\}$, $k=2$ ja.

Reduktion: von 3-SAT (HA 12.2 / Probeklausur).

Konstruktion: U = Literale; Paar-Mengen $\{x_i, \bar{x}_i\}$, Klausel-Mengen C_j ; $k = n$.

$\Rightarrow$: Belegung $\rightarrow H$ = wahre Literale: trifft jedes Paar (eines wahr) und jede Klausel (erfülltes Literal).

$\Leftarrow$: $k = n$ und n disjunkte Paare $\rightarrow$ genau ein Literal pro Paar = Belegung; Klauselmengen getroffen = erfüllt.

ETH: $|U| = 2n$, $r = n + m \leq 4m$, $k = n \Rightarrow$ nicht in $2^{o(|U|)}$, $2^{o(r)}$ (Sparsification), $2^{o(k)}$.

SETCOVER

Def: Mengen $F_1, \dots, F_r$ über U ; k Mengen, deren Vereinigung U ist?

Reduktion: von HITTINGSET (SS23-Klausur; Rollen tauschen).

Konstruktion: Bipartite Inzidenz: neues Universum $U' = [r]$ (alte Mengen-Indizes); pro altes Element w die Menge $F'_w = \{i \mid w \in F_i\}$; $k' = k$.

$\Rightarrow$: Hitting-Set H trifft jede $F_i \Leftrightarrow$ die Mengen $\{F'_w \mid w \in H\}$ überdecken $[r]$.

$\Leftarrow$: symmetrisch (Dualität: Element trifft Menge = Menge enthält Element).

ETH: Parameter tauschen: $|U'| = r$, $r' = |U| \Rightarrow$ SETCOVER nicht in $2^{o(r)}$ und nicht in $2^{o(|U|)}$ (jeweils übersetzt).

DOMINATINGSET

Def: M , $|M| = k$: jeder Knoten in M oder Nachbar von M .

Bsp: Stern: Zentrum dominiert alles, $k=1$.

Reduktion: von 3-SAT (SS24-Klausur).

Konstruktion: Pro Variable Dreieck $\{x_i, \bar{x}_i, d_i\}$; pro Klausel Knoten C_j mit Kanten zu seinen Literalen; $k = n$.

$\Rightarrow$: Belegung $\rightarrow M$ = wahre Literale: dominiert Dreieck (alle drei benachbart) und C_j (erfülltes Literal).

$\Leftarrow$: $k = n$ Dreiecke brauchen je einen Knoten (d_i nur intern nützlich $\rightarrow$ obdA Literal); C_j dominiert $\rightarrow$ ein Literal wahr.

ETH: $|V| = 3n + m = O(m)$, $|E| = 3n + 3m = O(m)$ (**linear!**) $\Rightarrow$ nicht in $2^{o(|V|)}$ und nicht in $2^{o(|E|)}$ – Kanten OHNE Wurzel.

NAE-4-SAT

Def: Klauseln ≤ 4 Literale; Belegung, sodass jede Klausel wahres UND falsches Literal hat ("not all equal")?

Reduktion: von 3-SAT (SS25-Klausur).

Konstruktion: Frische Variable w ; jede Klausel $C_i \rightarrow C_i \cup \{w\}$.

$\Rightarrow$: Erfüllende Belegung + w = falsch: wahres Literal existiert, w ist das falsche.

$\Leftarrow$: NAE-Lösung; obdA w = falsch (sonst alles flippen – NAE bleibt!); dann hat jede Klausel ein wahres Original-Literal.

ETH: $n' = n + 1$, $m' = m \Rightarrow$ nicht in $2^{o(n)}$, $2^{o(m)}$.

SETSPLITTING

Def: Grundmenge S , Mengen F_i ; Partition $S = S_1 \dot{\cup} S_2$, sodass jede F_i beide Seiten trifft?

Reduktion: von NAE-4-SAT (SS25-Klausur).

Konstruktion: S = Literale; Paar-Mengen $\{x_i, \bar{x}_i\}$ + Klausel-Mengen C_i .

$\Rightarrow$: NAE-Belegung: S_1 = wahre Literale. Paare gesplittet (eins wahr, eins falsch), Klauseln gesplittet (NAE!).

$\Leftarrow$: Splitting: Paar-Mengen erzwingen $x_i, \bar{x}_i$ auf verschiedenen Seiten $\rightarrow$ konsistente Belegung (S_1 = wahr); Klausel beidseitig = NAE.

ETH: $|S| = 2n$, $r = n + m \Rightarrow$ nicht in $2^{o(|S|)}$, $2^{o(r)}$.

GRIDTILING

Def: $k \times k$ Gitter, Mengen $S_{i,j} \subseteq [n]^2$; Auswahl $e_{i,j} \in S_{i,j}$, zeilenweise gleiche 1. Komponente, spaltenweise gleiche 2. Komponente.

Reduktion: von CLIQUE (SS24-Klausur; $k \in \Theta(n)$ erlaubt).

Konstruktion: Diagonale $S_{i,i} = \{(a, a)\}$; sonst $S_{i,j} = \{(a, b) \mid \{a, b\} \in E, a \neq b\}$; k übernehmen.

$\Rightarrow$: Clique $v_1, \dots, v_k$: setze $e_{i,j} = (v_i, v_j)$ – Konsistenz nach Konstruktion.

$\Leftarrow$: Zeilen-/Spaltenkonsistenz definiert v_i (Diagonale erzwingt Paare (a, a)); Off-Diagonale erzwingt Kanten zwischen allen v_i, v_j .

ETH: $X = \sum |S_{i,j}| = O(k^2 |E|) = O(n^4)$, $Y = \max |S_{i,j}| = O(n^2) \Rightarrow$ nicht in $2^{o(\sqrt[4]{X})}$, $2^{o(\sqrt{Y})}$.

$2 \mid \text{prec}, p \in \{1, 2\} \mid C_{\max}$

Def: 2 Maschinen, Präzedenz-DAG, Zeiten 1/2; Makespan $\leq T$?

Reduktion: von k -CLIQUE (SS24-Klausur, Konstruktion gegeben).

Konstruktion: **[Skizze – Detail selbst prüfen]** Knoten-Jobs ($p=1$), Kanten-Jobs ($p=2$), $3|V| + 2|E|$ Dummies; Präzedenz Knoten $\rightarrow$ inzidente Kanten; $T = 2|V| + 2|E|$, $n = 4|V| + 3|E|$.

$\Rightarrow$: Clique-Knoten früh einplanen, ihre Kanten füllen Lücken deadline-genau.

$\Leftarrow$: Enger Makespan erzwingt Clique-Struktur im frühen Fenster.

ETH: n und T linear in $|V| + |E|$; mit Clique-Schranke ($|E|$ -Version, zusammenhängend): nicht in $2^{o(\sqrt{n})}$, $2^{o(\sqrt{T})}$.

ILP-FEASIBILITY

Def: $Ax \leq b$, $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ lösbar?

Reduktion: von 3-SAT (SS23-Klausur).

Konstruktion: Variable je Literal ($N = 2n$); pro Klausel $-\sum_{\ell \in C_i} x_\ell \leq -1$; pro Variable $x_v + x_{\bar{v}} \leq 1$ und

$$-x_v - x_{\bar{v}} \leq -1 \quad (M = m + 2n).$$

$\Rightarrow$: Belegung $\rightarrow$ 0/1-Vektor erfüllt alles.

$\Leftarrow$: Paar-Gleichungen erzwingen $x_v + x_{\bar{v}} = 1$ (0/1-Belegung); Klausel-Zeile = erfülltes Literal.

ETH: $M = O(m)$, $N = O(n) \Rightarrow$ nicht in $2^{o(M)}$, $2^{o(N)}$.

HALT_{TM} (nur NP-schwer!)

Def: Hält DTM M auf Wort w ?

Reduktion: von 3-SAT (HA 11.2).

Konstruktion: M_φ : probiere alle 2^n Belegungen; falls eine erfüllt, halte; sonst Endlosschleife. $w = \langle \varphi \rangle$.

$\Rightarrow$: Erfüllbar $\rightarrow M_\varphi$ findet Belegung und hält.

$\Leftarrow$: M_φ hält nur im Erfolgsfall $\rightarrow$ erfüllbar.

Merke: NICHT in NP (unentscheidbar) $\rightarrow$ NP-schwer $\neq$ NP-vollständig. Reduktion muss polynomiell sein – M_φ wird nur *konstruiert*, nicht ausgeführt!

Klausur-Varianten-Tricks (Zusatzeigenschaft erzwingen)

Universalknoten: k -CLIQUEUNIVERSAL (HA 10.2): Universalknoten u anhängen, $k' = k + 1$. Rück-Richtung: obdA u in der Clique (sonst tauschen).

Verbotener Knoten: CLIQUE-NOMEMBER (Präsenz 11.2): isolierten Knoten v anhängen; isoliert $\rightarrow$ nie in einer Clique ≥ 2 .

Clique UND IS: CLIQUEANDINDEPENDENTSET (SS24): k isolierte Knoten anhängen $\rightarrow$ IS der Größe k existiert immer; Clique unverändert.

Mindestgrad: k -CLIQUE-DEG-3, 3-COLOR Grad 3, Hitchhiker's-HC Grad 42: **[Skizze – Detail selbst prüfen]**

Grad per Gadget auffüllen, ohne neue Lösungen zu schaffen (Pendant-Dreiecke/Pfad-Gadgets, die keine neue Clique/Färbung/To ermöglichen). Bei HC: Gadget so, dass es von jedem Ham-Kreis zwangsläufig komplett durchlaufen wird.

Feste Kardinalität: SUBSETSUMCARDINALITY: +1-Shift und Einser-Padding (s.o.).

Grundmuster: Immer dieselben 5 Schritte: $\in \text{NP}$ · Konstruktion · $\Rightarrow$ · $\Leftarrow$ (mit *beliebiger* Lösung starten, obdA-Tausch) · Laufzeit + Schlusssatz.