

Hausaufgabe 10

Marek Lenczewski
Matrikelnummer: 1025252

21. Juni 2026

Hausaufgabe 10.1

Teil 1: FeedbackVertexSet ist in NP

$FEEDBACKVERTEXSET \in NP$ wurde in Hausaufgabe 9.2 gezeigt.

Teil 2: FeedbackVertexSet ist NP-schwer

Zeige, dass $FEEDBACKVERTEXSET$ NP-schwer ist durch die Reduktion:
 $VERTEXCOVER \leq FEEDBACKVERTEXSET$.

Konstruktion: Sei G und k eine Instanz von $VERTEXCOVER$.
Wir konstruieren daraus ein $FEEDBACKVERTEXSET$ durch:

- $V' = V$
- $E' = \{(u, v), (v, u) \mid \{u, v\} \in E\}$
- $k' = k$

Beweis VertexCover nach FeedbackVertexSet:

- Sei VC ein VertexCover von G mit $|VC| \leq k$.
- Somit hat jede Kante aus G einen Endpunkt in VC .
- Also hat $G \setminus VC$ keine Kanten mehr.
- Dann hat auch $G' \setminus VC$ keine Kanten und damit keine Kreise.
- Also ist VC ein FeedbackVertexSet für G' mit $|VC| \leq k'$.

Beweis FeedbackVertexSet nach VertexCover:

- Sei FVS ein FeedbackVertexSet von G' mit $|FVS| \leq k'$.
- Dann ist $G' \setminus FVS$ kreisfrei.
- Angenommen FVS wäre kein VertexCover.

- Dann gäbe es eine Kante $\{u, v\} \in E$ mit $u, v \notin FVS$.
- Somit wären u, v noch in $G' \setminus FVS$ vorhanden.
- Die Kanten (u, v) und (v, u) würden einen Kreis erzeugen.
- Das wäre ein Widerspruch zu $G' \setminus FVS$ ist kreisfrei.
- Also ist FVS ein VertexCover von G mit $|FVS| \leq k$.

Laufzeit: Nur die Kanten werden verdoppelt $O(|E|)$, also bleibt die Transformation polynomiell.

Da $FEEDBACKVERTEXSET \in NP$ und NP-schwer ist, folgt dass $FEEDBACKVERTEXSET$ NP-vollständig ist. □

Hausaufgabe 10.2

Teil 1: k -CliqueUniversal ist in NP

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Zahl k und Zertifikat $C \subseteq V$.

Der Verifizierer arbeitet wie folgt:

- Prüfe ob $|C| \geq k$, lehne ab falls $|C| < k$.
- Prüfe für jedes Paar $\{x, y\} \subseteq C$ ob $\{x, y\} \in E$.
- Lehne ab, falls für ein Paar $\{x, y\} \notin E$.
- Sonst akzeptiere.

Existiert eine Clique C mit $|C| \geq k$, dann gibt es ein Zertifikat C dafür. Dieses wird vom Verifizierer akzeptiert und sonst abgelehnt.

Prüfung der Größe und aller Paare läuft in $O(|V|^2)$, somit in poly. Zeit. Somit ist das ein poly. Verifizierer. Also gilt k -CLIQUEUNIVERSAL $\in$ NP.

Teil 2: k -CliqueUniversal ist NP-schwer

Zeige, dass k -CLIQUEUNIVERSAL NP-schwer ist durch die Reduktion:

$CLIQUE \leq k$ -CLIQUEUNIVERSAL.

$CLIQUE$ ist bereits als NP-vollständig bekannt.

Konstruktion: Sei G und k eine Instanz von $CLIQUE$.

Wir konstruieren daraus ein k -CLIQUEUNIVERSAL durch:

- $V' = V \cup \{u\}$ mit einem neuen Knoten u
- $E' = E \cup \{\{u, v\} \mid v \in V\}$
- $k' = k + 1$

Beweis Clique nach k -CliqueUniversal:

- Sei C eine Clique von G mit $|C| \geq k$.
- Da u mit allen Knoten verbunden ist, ist u auch mit allen Knoten aus C verbunden.
- Damit ist $C \cup \{u\}$ eine Clique in G' .
- Dann gilt auch $|C \cup \{u\}| \geq k + 1 = k'$.

Beweis k -CliqueUniversal nach Clique:

- Sei C' eine Clique von G' mit $|C'| \geq k'$.
- Setze $C = C' \setminus \{u\}$, dann gilt $|C| \geq k' - 1 = k$.

- Alle Knoten in C liegen in V und alle Kanten zwischen ihnen liegen in E , da nur Kanten zu u neu hinzugefügt wurden.
- Damit ist C eine Clique in G mit $|C| \geq k$.

Laufzeit: Es werden ein Knoten und $|V|$ Kanten hinzugefügt $O(|V|)$, also bleibt die Transformation polynomiell.

Da $k\text{-CLIQUEUNIVERSAL} \in NP$ und NP-schwer ist, folgt dass $k\text{-CLIQUEUNIVERSAL}$ NP-vollständig ist. $\square$