

Hausaufgabe 11

Marek Lenczewski
Matrikelnummer: 1025252

29. Juni 2026

Hausaufgabe 11.1

Teil 1: Δ -Cover ist in NP

Eingabe: Graph $G = (V, E)$, Zahl k und Zertifikat $C_\Delta \subseteq V$.

Der Verifizierer arbeitet wie folgt:

- Prüfe ob $|C_\Delta| \leq k$, lehne ab falls $|C_\Delta| > k$.
- Prüfe für jedes Knotentripel $\{a, b, c\} \subseteq V$, ob es ein Dreieck bildet (also ob $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\} \in E$).
- Lehne ab, falls ein solches Dreieck kein a , b oder c in C_Δ hat.
- Sonst akzeptiere.

Existiert eine Dreiecksüberdeckung C_Δ mit $|C_\Delta| \leq k$, dann gibt es ein Zertifikat dafür. Dieses wird vom Verifizierer akzeptiert und sonst abgelehnt.

Die Größenprüfung läuft in $O(|V|)$ und das Prüfen aller Tripel in $O(|V|^3)$, somit in poly. Zeit. Also gilt $\Delta\text{-COVER} \in NP$.

Teil 2: Δ -Cover ist NP-schwer

Zeige, dass $\Delta\text{-COVER}$ NP-schwer ist durch die Reduktion:

$VERTEXCOVER \leq \Delta\text{-COVER}$.

$VERTEXCOVER$ ist bereits als NP-vollständig bekannt.

Konstruktion: Sei $G = (V, E)$ und k eine Instanz von $VERTEXCOVER$. Wir konstruieren daraus eine $\Delta\text{-COVER}$ -Instanz $G' = (V', E')$ durch:

- Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ füge einen neuen Knoten w_e hinzu.
- $V' = V \cup \{w_e \mid e \in E\}$
- $E' = E \cup \{\{u, w_e\}, \{v, w_e\} \mid e = \{u, v\} \in E\}$
- $k' = k$

So wird aus jeder Kante $e = \{u, v\}$ ein Dreieck $\{u, v, w_e\}$.

Beweis VertexCover nach Δ -Cover:

- Sei C ein VertexCover von G mit $|C| \leq k$.
- Zu zeigen sei, dass C auch eine Δ -Cover für G' mit $|C| \leq k'$ ist.
- Jedes Dreieck in G' hat die Form $\{u, v, w_e\}$ für eine Kante $e = \{u, v\} \in E$.
- Da C ein VertexCover ist, gilt $u \in C$ oder $v \in C$.
- Somit hat jedes Dreieck mindestens einen Knoten in C .
- Also ist C eine Δ -Cover für G' mit $|C| \leq k'$.

Beweis Δ -Cover nach VertexCover:

- Sei C_Δ eine Δ -Cover für G' mit $|C_\Delta| \leq k'$.
- Jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ bildet durch $\{u, v, w_e\}$ ein Dreieck in G' .
- Also gilt u, v oder $w_e \in C_\Delta$ für alle Kanten $e \in E$.
- Falls $w_e \in C_\Delta$, dann kann man w_e durch u ersetzen, ohne die Eigenschaft von Δ -Cover zu verletzen.
- Denn w_e liegt in genau einem Dreieck $\{u, v, w_e\}$, das auch durch u gedeckt wird.
- So entsteht eine Menge C mit $|C| \leq |C_\Delta| \leq k$, die nur noch Knoten aus V enthält.
- Für jede Kante $e = \{u, v\} \in E$ gilt nun $u \in C$ oder $v \in C$.
- Also ist C ein VertexCover für G mit $|C| \leq k$.

Laufzeit: Pro Kante werden ein Knoten und zwei Kanten hinzugefügt $O(|E|)$, also bleibt die Transformation polynomiell.

Da Δ -COVER $\in NP$ und NP-schwer ist, folgt dass Δ -COVER NP-vollständig ist.
 $\square$

Hausaufgabe 11.2

$HALT_{TM}$ ist NP-schwer

Zeige, dass $HALT_{TM}$ NP-schwer ist durch die Reduktion:

$$SAT \leq HALT_{TM}.$$

SAT ist bereits als NP-vollständig bekannt, also insbesondere NP-schwer.

Konstruktion: Sei φ eine SAT -Instanz mit den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Wir konstruieren daraus eine $HALT_{TM}$ -Instanz $\langle M, w \rangle$ durch:

- $w = \langle \varphi \rangle$, also die Kodierung der Formel φ .
- M ist eine feste DTM, die auf Eingabe $\langle \varphi \rangle$ wie folgt arbeitet:
 1. Lese φ und probiere nacheinander alle 2^n Belegungen β der Variablen $x_1, \dots, x_n$.
 2. Falls eine Belegung β die Formel φ erfüllt, halte.
 3. Falls alle 2^n Belegungen geprüft wurden und keine φ erfüllt, gehe in eine Endlosschleife.

Die Abbildung $f(\varphi) = \langle M, w \rangle$ kodiert nur φ ; die Maschine M ist konstant. Somit ist f in poly. Zeit berechenbar.

Beweis SAT nach $HALT_{TM}$:

- Sei $\varphi \in SAT$.
- Dann existiert eine erfüllende Belegung β .
- M probiert alle Belegungen und findet β , also hält M auf w .
- Damit gilt $\langle M, w \rangle \in HALT_{TM}$.

Beweis $HALT_{TM}$ nach SAT:

- Sei $\langle M, w \rangle \in HALT_{TM}$, also hält M auf w .
- M hält nur, wenn es eine erfüllende Belegung β findet.
- Denn ohne erfüllende Belegung geht M in die Endlosschleife.
- Also existiert eine erfüllende Belegung für φ .
- Damit gilt $\varphi \in SAT$.

Laufzeit: Es wird nur φ kodiert und die feste Maschine M ausgegeben $O(|\varphi|)$, also bleibt die Transformation polynomiell.

Da SAT NP-schwer ist und $SAT \leq HALT_{TM}$ gilt, folgt dass $HALT_{TM}$ NP-schwer ist. □