

Hausaufgabe 12

Marek Lenczewski
Matrikelnummer: 1025252

6. Juli 2026

Hausaufgabe 12.1

Teil (a): Der Algorithmus hat Güte 2

Zu zeigen ist, dass der Algorithmus die Güte 2 hat, also die Lösung vom Algorithmus mindestens halb so gut ist wie die optimale Lösung. Also $\nu(A(\varphi)) \geq \frac{1}{2}\nu(OPT(\varphi))$ für alle Eingaben φ .

Sei φ eine beliebige 3-SAT-Formel mit m Klauseln $C_1, C_2, \dots, C_m$, wobei jede Klausel genau 3 Literale enthält.

Betrachte die beiden Belegungen β_0 (alle Variablen false) und β_1 (alle Variablen true):

- Unter β_0 ist jedes negative Literal wahr.
- Unter β_1 ist jedes positive Literal wahr.

Jedes Literal ist positiv oder negativ. Jede Klausel C_i enthält mindestens ein Literal. Also wird jede Klausel unter β_0 oder unter β_1 (oder unter beiden) erfüllt.

Sei $\nu_0 = \nu(\beta_0)$ die Anzahl der von β_0 erfüllten Klauseln und $\nu_1 = \nu(\beta_1)$ die Anzahl der von β_1 erfüllten Klauseln. Da jede Klausel zu ν_0 oder ν_1 zählt, gilt

$$\nu_0 + \nu_1 \geq m.$$

Der Algorithmus wählt die Belegung mit den meisten erfüllten Klauseln, also

$$\nu(A(\varphi)) = \max\{\nu_0, \nu_1\} \geq \frac{\nu_0 + \nu_1}{2} \geq \frac{m}{2}.$$

Da die optimale Lösung höchstens alle m Klauseln erfüllen kann, gilt $\nu(OPT(\varphi)) \leq m$. Daraus folgt

$$\nu(A(\varphi)) \geq \frac{m}{2} \geq \frac{\nu(OPT(\varphi))}{2}.$$

Somit hat der Algorithmus eine Güte von 2. □

Teil (b): Formel mit genau der Hälfte

Der Algorithmus erfüllt genau die Hälfte der maximal erfüllbaren Klauseln, wenn β_0 und β_1 jeweils nur eine Klausel erfüllen, das Optimum aber beide Klauseln erfüllt.

Formel: $\varphi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$

Unter β_0 (alle false):

- $C_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) = (\text{false} \vee \text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$
- $C_2 = (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) = (\text{true} \vee \text{true} \vee \text{true}) = \text{true}$
- $\nu(\beta_0) = 1$

Unter β_1 (alle true):

- $C_1 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) = (\text{true} \vee \text{true} \vee \text{true}) = \text{true}$
- $C_2 = (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) = (\text{false} \vee \text{false} \vee \text{false}) = \text{false}$
- $\nu(\beta_1) = 1$

Der Algorithmus wählt $\nu(A(\varphi)) = \max\{\nu(\beta_0), \nu(\beta_1)\} = \max\{1, 1\} = 1$.

Eine optimale Lösung wäre zum Beispiel $x_1 = \text{true}, x_2 = \text{false}, x_3 = \text{false}$:

- $C_1 = (\text{true} \vee \text{false} \vee \text{false}) = \text{true}$
- $C_2 = (\text{false} \vee \text{true} \vee \text{true}) = \text{true}$

Daraus ergibt sich $\nu(OPT(\varphi)) = 2$, also $\nu(A(\varphi)) = 1 = \frac{\nu(OPT(\varphi))}{2}$. Der Algorithmus erfüllt genau die Hälfte der maximal erfüllbaren Klauseln. $\square$