



Hausaufgaben zur Vorlesung »Analyse von Algorithmen und Komplexität«

Blatt 10

Definition 1 (Feedback Vertex Set (FVS)). Für einen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein Feedback Vertex Set eine Menge von Knoten $X \subseteq V$, sodass $G \setminus X$ kreisfrei ist.

Für das FEEDBACKVERTEXSET Problem ist neben einem Graphen G eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben und es wird gefragt, ob ein Feedback Vertex Set mit Größe (Anzahl der Knoten) höchstens k in G existiert.

Hausaufgabe 10.1 (FEEDBACKVERTEXSET ist **NP**-vollständig) (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass FEEDBACKVERTEXSET **NP**-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie VERTEXCOVER auf FEEDBACKVERTEXSET. Wenn ein Vertex Cover aus einem Graphen entfernt wird, hat dieser keine Kanten mehr.

Lösung. FEEDBACKVERTEXSET $\in$ **NP** ist bekannt aus der letzten Hausaufgabe. Nun zeigen wir eine Reduktion von VERTEXCOVER auf FEEDBACKVERTEXSET. Betrachte die folgende **Reduktion**:

Für eine gegebene VERTEXCOVER Instanz $(G = (V, E), k)$ erzeuge den Graphen $G' = (V, E')$ mit $E' := \{(u, v), (v, u) \mid \{u, v\} \in E\}$. Gebe (G', k) als FEEDBACKVERTEXSET Instanz aus.

Korrektheit:

$\Rightarrow$ (Falls (G, k) eine Ja-Instanz von VERTEXCOVER ist, dann ist (G', k) eine Ja-Instanz von FEEDBACKVERTEXSET.):

Sei $C \subseteq V$ ein Vertex Cover mit Größe kleiner oder gleich k . Dann enthält $G \setminus C$ keine Kanten. Damit hat $G' \setminus C$ ebenfalls keine Kanten und somit keine Kreise.

$\Leftarrow$ (Falls (G', k) eine Ja-Instanz von FEEDBACKVERTEXSET ist, dann ist (G, k) eine Ja-Instanz von VERTEXCOVER.):

Sei $X \subseteq V'$ ein Feedback Vertex Set mit Größe kleiner oder gleich k . Dann ist X ein Vertex Cover in G , da ansonsten eine Kante $\{u, v\} \in E$ existiert, für die $u \notin X \wedge v \notin X$ gilt. Damit wäre aber (u, v, u) ein Kreis in G' und X somit kein Feedback Vertex Set.

Laufzeit: Das Erzeugen der Menge E' geht in Zeit $O(|E|)$. Insgesamt ist die Reduktion demnach in Laufzeit $O(|E|)$, also in polynomieller Laufzeit, durchführbar.

Also existiert eine polynomielle Reduktion von VERTEXCOVER auf FEEDBACKVERTEXSET. Da VERTEXCOVER nach den aktuellen Präsenzaufgaben **NP**-vollständig ist und

FEEDBACKVERTEXSET $\in$ **NP** gilt, ist somit FEEDBACKVERTEXSET **NP**-vollständig. $\square$

Bewertung 2 Punkte für die Konstruktion, 1 Punkt für den 1. Fall, 1 Punkt für den 2. Fall, 0.5 Punkte für die Laufzeit, 0.5 Punkte für die Beweisführung im Ganzen

Hausaufgabe 10.2 (k -CLIQUE mit universellem Knoten) (5 Punkte)

Die folgende Aufgabe ist eine klassische Klausuraufgabe (da sie ein Problem, dessen **NP**-Vollständigkeit bereits bekannt ist, mit einer Zusatzeigenschaft versieht - und erneut nach **NP**-Vollständigkeit fragt).

Wir definieren das Problem k -CLIQUEUNIVERSAL wie folgt:

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, wobei ein $u \in V$ so existiert, dass u mit allen anderen Knoten verbunden ist, i.e. $\{\{u, v\} \mid v \in V \setminus \{u\}\} \subseteq E$

Entscheide: Existiert eine Clique $C \subseteq V$ von G mit $|C| \geq k$?

Zeigen Sie, dass k -CLIQUEUNIVERSAL **NP**-vollständig ist.

Lösung. Als Verifizierer für k -CLIQUEUNIVERSAL eignet sich jeder Verifizierer für k -CLIQUE, da lediglich eine zusätzliche Eigenschaft der Instanz hinzugekommen ist. Ein solcher Verifizierer existiert, da k -CLIQUE in **NP** ist. Also ist auch k -CLIQUEUNIVERSAL in **NP**.

Wir zeigen: k -CLIQUE $\leq k$ -CLIQUEUNIVERSAL.

Sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ gegeben.

Definiere $\bar{k} = k + 1$ und $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ durch $\bar{V} = V \cup \{u\}$ für einen neuen Knoten $u \notin V$ sowie $\bar{E} = E \cup \{\{u, v\} \mid v \in V\}$.

Da $|\{u\}| = 1$ und $|\{\{u, v\} \mid v \in V\}| = |V|$ gilt, lässt sich $\bar{G}$ aus G in Linearzeit $\mathcal{O}(|V|)$ berechnen.

Zeige: $(G, k) \in k$ -CLIQUE gdw. $(\bar{G}, \bar{k}) \in k$ -CLIQUEUNIVERSAL

“ $\Rightarrow$ ”. Sei $C \subseteq V$ eine Clique in G mit $|C| \geq k$. Da $V \subseteq \bar{V}$, $E \subseteq \bar{E}$, und u in $\bar{G}$ mit allen Knoten in $\bar{V}$ verbunden ist, ist $\bar{C} := C \cup \{u\}$ eine Clique in $\bar{G}$ mit $|\bar{C}| = |C \cup \{u\}| = |C| + 1 \geq k + 1 = \bar{k}$.

“ $\Leftarrow$ ”. Set $\bar{C} \subseteq \bar{V}$ eine Clique in $\bar{G}$ mit $|\bar{C}| \geq \bar{k}$. Dann gilt für $C := \bar{C} \setminus \{u\}$, dass $C \subseteq V$, da u der einzige Knoten in $\bar{V}$ ist, der nicht in V ist, und es gilt $|C| = |\bar{C} \setminus \{u\}| \geq |\bar{C}| - 1 \geq \bar{k} - 1 = k + 1 - 1 = k$. Da insbesondere $C \subseteq \bar{C}$ und jede Teilmenge einer Clique wieder eine Clique ist, ist C eine Clique in G . $\square$