



Hausaufgaben zur Vorlesung »Analyse von Algorithmen und Komplexität«

Blatt 12

Definition 1 (MAX-3-SAT). Bei dem Problem MAX-3-SAT ist eine Formel ϕ in konjunktiver Normalform gegeben, wobei jede Klausel 3 Literale enthält. Gesucht ist eine Belegung β der Variablen, die die Anzahl $v(\beta)$ der erfüllten Klauseln maximiert.

Hausaufgabe 12.1 (MAX-3-SAT, KLAUSURAUFGABE AUS SOSe23, PZ1) (10 Punkte)
Betrachten Sie folgenden Algorithmus A:

- Sei β_0 die Belegung, die alle Variablen auf false setzt.
 - Sei β_1 die Belegung, die alle Variablen auf true setzt.
 - Falls $v(\beta_0) \geq v(\beta_1)$, gib β_0 zurück.
 - Sonst gib β_1 zurück.
- (a) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass obiger Algorithmus Güte 2 hat, d.h. $v(A(\phi)) \geq \frac{1}{2}v(OPT(\phi))$ gilt für alle Eingaben ϕ .
- (b) (4 Punkte) Geben Sie eine Formel an, bei der der Algorithmus eine Belegung ausgibt, die genau die Hälfte der maximal erfüllbaren Klauseln erfüllt. Begründen Sie kurz, warum Ihre Formel geeignet ist.

Hinweis: Sie brauchen nur höchstens zwei Klauseln und vier Variablen.

Lösung. (a) Für jede Klausel C gilt, dass sie von mindestens einer der Belegungen β_0 und β_1 erfüllt wird. Wir zeigen nun per Widerspruch, dass der obige Algorithmus eine Güte von 2 hat:

Angenommen, es gilt $v(A(\phi)) < \frac{1}{2}v(OPT(\phi))$ für eine Formel ϕ . Sei m die Anzahl an Klauseln in ϕ . Dann gilt $v(OPT(\phi)) \leq m$. Da $v(A(\phi)) < \frac{1}{2}v(OPT(\phi)) \leq \frac{1}{2}m$, gilt $v(\beta_0) < \frac{1}{2}m$ und $v(\beta_1) < \frac{1}{2}m$. Da jede Klausel C allerdings von mindestens einer der Belegungen β_0 und β_1 erfüllt wird, gilt $v(\beta_0) \geq \frac{1}{2}m$ oder $v(\beta_1) \geq \frac{1}{2}m$. Dies ist ein Widerspruch.

Also gilt $v(A(\phi)) \geq \frac{1}{2}v(OPT(\phi))$ für alle Eingaben ϕ und obiger Algorithmus hat Güte 2.

- (b) Betrachte folgende Formel: $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$ Mit $\beta = \{x_0 \rightarrow \text{false}, x_1 \rightarrow \text{true}, x_2 \rightarrow \text{true}, x_3 \rightarrow \text{true}\}$ gilt $v(\beta) = 2$. Da ϕ nur zwei Klauseln hat, gilt somit $v(OPT(\phi)) = 2$. Es gilt allerdings $v(\beta_0) = 1$, da hier nur die zweite Klausel erfüllt ist, und $v(\beta_1) = 1$, da hier nur die erste Klausel erfüllt ist. Somit gilt $v(A(\phi)) = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}v(OPT(\phi))$.

Bewertung (a) 2 Punkte korrekte Beweisführung im Allgemeinen, 2 Punkte Abschätzung Algorithmus, 2 Punkte Abschätzung Optimum; (b) 2 Punkte für Angabe einer korrekten Formel, 1 Punkt Ausgabe Algorithmus, 1 Punkt Optimum ☐

Abgabe: 06.07.2026, 10:00 Uhr in Moodle.