



Hausaufgaben zur Vorlesung »Analyse von Algorithmen und Komplexität«

Blatt 13

Hausaufgabe 13.1 (Lower Bound: VERTEXCOVER)

(5 Punkte)

Betrachten Sie die Reduktion aus der Musterlösung zu Präsenzserie 10 von CLIQUE auf VERTEXCOVER.

1. Geben Sie die Anzahl der Knoten, die Anzahl der Kanten und den Wert k für die resultierende VERTEXCOVER Instanz in Abhängigkeit von der originalen CLIQUE Instanz an.
2. Zeigen Sie Lower Bounds für VERTEXCOVER bezüglich Anzahl der Knoten, Anzahl der Kanten und k basierend auf der ETH und der Reduktion aus der Musterlösung zu Präsenzserie 10.

Lösung. 1. Sei $I = (G = (V, E), k)$ eine Instanz von CLIQUE und $I' = (G' = (V', E'), k')$ die aus der Reduktion resultierende Instanz von VERTEXCOVER. Es gilt $|V'| = |V|$, $|E'| = \frac{1}{2}|V|(|V| - 1) - |E| \leq |V|^2$ und $k' = |V| - k \leq |V|$.

2. • Angenommen es gäbe einen Algorithmus, der VERTEXCOVER in $2^{o(|V'|)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Durch die Kombination der Reduktion von CLIQUE auf VERTEXCOVER und diesem Algorithmus, existiert dann auch ein $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ Algorithmus für CLIQUE, da $|V'| = |V|$ nach Aufgabenteil 1. Aus der Musterlösung der Präsenzserie 13 folgt somit, dass die ETH falsch ist.

Damit kann es so einen Algorithmus für VERTEXCOVER nur geben, wenn die ETH falsch ist.

- Angenommen es gäbe einen Algorithmus, der VERTEXCOVER in $2^{o(\sqrt{|E'|})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Durch die Kombination der Reduktion von CLIQUE auf VERTEXCOVER und diesem Algorithmus, existiert dann auch ein $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ Algorithmus für CLIQUE, da $|E'| \leq |V|^2$ nach Aufgabenteil 1. Aus der Musterlösung der Präsenzserie 13 folgt somit, dass die ETH falsch ist.

Damit kann es so einen Algorithmus für VERTEXCOVER nur geben, wenn die ETH falsch ist.

- Angenommen es gäbe einen Algorithmus, der VERTEXCOVER in $2^{o(k')} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Durch die Kombination der Reduktion von CLIQUE auf VERTEXCOVER und diesem Algorithmus, existiert dann auch ein $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ Algorithmus für CLIQUE, da $k' \leq |V|$ nach Aufgabenteil 1. Aus der Musterlösung der Präsenzserie 13 folgt somit, dass die ETH falsch ist.

Damit kann es so einen Algorithmus für VERTEXCOVER nur geben, wenn die ETH falsch ist. □

Bewertung 1 Punkt für den ersten Teil und 1.5 + 1.5 + 1 für den zweiten.

Definition 1 (HITTINGSET). Bei diesem Problem ist ein Universum U , Teilmengen des Universums $F_1, \dots, F_r \subseteq U$ und eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben. Gibt es eine Menge $S \subseteq U$ mit $|U| \leq k$ und $S \cap F_i \neq \emptyset$ für alle $i \in [r]$?

Anschaulicher wird bei diesem Problem nach maximal k Elementen aus dem Universum gefragt, sodass diese Elemente alle gegebenen Mengen F_i „treffen“.

Hausaufgabe 13.2 (Lower Bound: HITTINGSET) (5 Punkte)

Betrachten Sie folgende Reduktion von 3-SAT auf HITTINGSET.

Für eine gegebene 3-SAT Instanz I mit n Variablen $x_1, \dots, x_n$ und m Klauseln $C_1, \dots, C_m$: Als Universum wählen wir $U = \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$. Für jede Variable x_i fügen wir die Menge $F_i := \{x_i, \bar{x}_i\}$ hinzu. Für jede Klausel C_j fügen wir die Menge $F_{n+j} := C_j$ hinzu. Wir setzen $k := n$ und erhalten damit eine HITTINGSET Instanz I .

1. Geben Sie die Größe des Universums, die Anzahl der Mengen und die Zahl k aus der resultierenden HITTINGSET Instanz in Abhängigkeit von der Anzahl der Variablen n und der Anzahl der Klauseln m aus der originalen 3-SAT Instanz an.
2. Beweisen Sie Lower Bounds für HITTINGSET bezüglich Universumsgröße, Anzahl der Mengen und der Zahl k basierend auf der obigen Reduktion und der ETH.

Lösung. 1. Für die Universumsgröße gilt $|U| = 2n$, für die Anzahl der Mengen gilt $r = n + m$ und es gilt $k = n$.

2. • Angenommen es gäbe einen Algorithmus, der HITTINGSET in $2^{o(|U|)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Durch die Kombination der Reduktion von 3-SAT auf HITTINGSET und diesem Algorithmus, existiert dann auch ein $2^{o(n)} \cdot |I|^{O(1)}$ Algorithmus für 3-SAT, da $|U| = 2n$ nach Aufgabenteil 1. Damit ist die ETH falsch.

Damit kann es so einen Algorithmus für HITTINGSET nur geben, wenn die ETH falsch ist.

- Angenommen es gäbe einen Algorithmus, der HITTINGSET in $2^{o(r)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Durch die Kombination der Reduktion von 3-SAT auf HITTINGSET und diesem Algorithmus, existiert dann auch ein $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ Algorithmus für 3-SAT, da $r = n + m$ nach Aufgabenteil 1 und $n \leq 3m$ für 3-SAT gilt. Aus dem Sparsification Lemma folgt damit, dass die ETH falsch ist.

Damit kann es so einen Algorithmus für HITTINGSET nur geben, wenn die ETH falsch ist.

- Angenommen es gäbe einen Algorithmus, der HITTINGSET in $2^{o(k)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Durch die Kombination der Reduktion von 3-SAT auf HITTINGSET und diesem Algorithmus, existiert dann auch ein $2^{o(n)} \cdot |I|^{O(1)}$ Algorithmus für 3-SAT, da $k = n$ nach Aufgabenteil 1. Damit ist die ETH falsch.

Damit kann es so einen Algorithmus für HITTINGSET nur geben, wenn die ETH falsch ist. $\square$

Bewertung 1 Punkt für den ersten Teil und 1.5 + 1.5 + 1 für den zweiten.

Abgabe: 13.07.2026, 10:00 Uhr in Moodle.