



CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Theoretische Informatik
Dr. Max A. Deppert, Janina Reuter, Annika Huch

29.06.2026

Präsenzaufgaben zur Vorlesung »Analyse von Algorithmen und Komplexität«

Blatt 12

Präsenzaufgabe 12.1 (Vertex Cover)

Ein Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Menge von Knoten $C \subseteq V$, so dass für jede Kante $\{v, w\} \in E$ gilt, dass $v \in C$ oder $w \in C$. Beim Optimierungsproblem Minimum Vertex Cover soll die kardinalitätskleinste Menge $C \subseteq V$ gefunden werden, die ein Vertex Cover von G ist.

Gegeben ist der folgende approximative Algorithmus mit Güte 2 für VertexCover:

Idee: Wähle eine beliebige Kante. Wenn einer der beiden Endknoten bereits in C ist, verwirf diese Kante. Sonst, füge beide Endknoten zur Menge C hinzu. Mache dies für jede Kante.

Algorithmus 2APPROXVC($G = (V, E)$)

```
1   $C = \{\}$ 
2  foreach  $\{u, v\} \in E$  do
3    if  $u \notin C$  and  $v \notin C$  then
4       $C = C \cup \{u, v\}$ 
5    fi
6  od
7  return  $C$ 
```

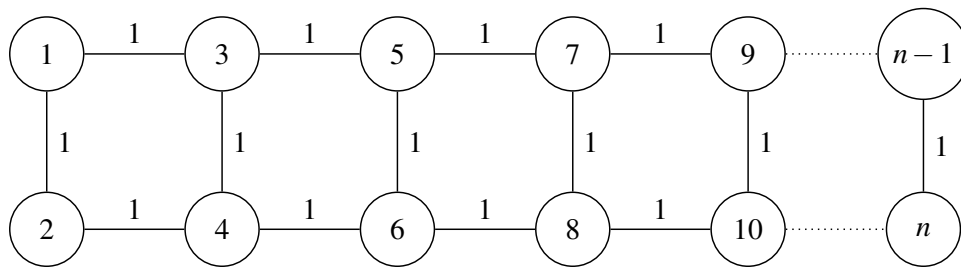
Beweisen Sie die Güte.

Präsenzaufgabe 12.2 (TSP)

In der Vorlesung haben Sie zwei approximative Algorithmen für das TSP-Problem kennen gelernt. Der erste Algorithmus ΔTSP_1 hat eine Approximationsrate von 2, während der zweite Algorithmus ΔTSP_2 von Christofides eine Approximationsrate von $3/2$ besitzt. In dieser Übung soll gezeigt werden, dass die zweite Rate scharf ist. D.h., dass es eine Folge von Instanzen gibt, auf denen der Algorithmus immer näher an diese Rate heran kommt.

Wir betrachten den vollständigen Graphen $K_n = (V, E)$ für ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 6}$ mit $n \bmod 4 = 2$ und die nachfolgende Gewichtsfunktion $d_2: E \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$.

Wir definieren $E_2 := \{\{i, i+2\} | i \in \{1, \dots, n-2\}\} \cup \{\{2i+1, 2i+2\} | i \in \{0, \dots, n/2-1\}\}$ und d_2 , so dass alle Kanten aus E_2 auf 1 abgebildet werden und alle Kanten aus $E \setminus E_2$ auf den Wert des kürzesten Wegs zwischen diesen Knoten in dem Graphen $G_2 = (V, E_2)$ abgebildet werden. Der Graph G_2 ist im folgenden abgebildet.



Zeigen Sie, dass

- (a) $\text{OPT}((K_n, d_2)) = n$ gilt und
- (b) eine mögliche Ausführung von ΔTSP_2 existiert, die auf Eingabe (K_n, d_2) eine Tour der Länge $(n-1) + n/2$ berechnet.