



CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Theoretische Informatik
Dr. Max A. Deppert, Janina Reuter, Annika Huch

22.06.2026

Präsenzaufgaben zur Vorlesung »Analyse von Algorithmen und Komplexität«

Blatt 11

Präsenzaufgabe 11.1 (Fragen über Fragen)

Diskutieren Sie nachfolgende Aussagen. Sind diese wahr oder falsch?

- (a) Für $L \in \mathbf{NP}$ gilt, aus $L \leq 3\text{-SAT}$ folgt, dass L $\mathbf{NP}$ -vollständig ist.
- (b) Gilt für eine Sprache L , dass sowohl $L \leq 3\text{-SAT}$ als auch $3\text{-SAT} \leq L$, dann ist L $\mathbf{NP}$ -vollständig.
- (c) Sei L $\mathbf{NP}$ -vollständig. Dann gilt $L \in \mathbf{P}$ genau dann, wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
- (d) Es ist möglich, dass $3\text{-SAT} \in \mathbf{P}$ und $\text{CLIQUE} \notin \mathbf{P}$.

Lösung.

- (a) Nein, ein Gegenbeispiel ist $L = \emptyset$. Offensichtlich gilt $L \in \mathbf{NP}$. Aus $L \leq 3\text{-SAT}$ folgt nur, dass sich L auf 3-SAT reduzieren lässt, nicht anders herum.
- (b) Das ist die Definition von $\mathbf{NP}$ -vollständig.
- (c) Korrekt, da sich jedes Problem auf L reduzieren lässt nach Def. $\mathbf{NP}$ -vollständig (und offensichtlich $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$).
- (d) Nein, weil 3-SAT $\mathbf{NP}$ -vollständig ist, lässt sich CLIQUE (liegt bekannterweise in $\mathbf{NP}$, ist sogar $\mathbf{NP}$ -vollständig) auf 3-SAT reduzieren.

Präsenzaufgabe 11.2 ($\mathbf{NP}$ -Vollständigkeit)

In dem Problem CLIQUE-NOMEMBER ist ein Graph $G = (V, E)$, ein Knoten $v \in V$ sowie eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben und es soll entschieden werden, ob es eine Clique mit k Knoten gibt, die den Knoten v nicht enthält.

Zeigen Sie, dass CLIQUE-NOMEMBER $\mathbf{NP}$ -vollständig ist, indem Sie eine Reduktion von CLIQUE auf CLIQUE-NOMEMBER angeben. Sie können davon ausgehen, dass CLIQUE-NOMEMBER $\in \mathbf{NP}$ ist.

Lösung. Clique-Nomember ist NP-schwer:

Sei $(G = (V, E), k)$ eine Eingabe für das Clique Problem.

Idee: Füge einen neuen isolierten Knoten v zu G hinzu.

Wir geben zuerst die Abbildung an: Sei $v \notin V$. Wir definieren die Eingabe für das Problem CLIQUE-NOMEMBER als den Graphen $G' := (V \cup \{v\}, E)$, den Knoten v als Knoten, der nicht benutzt werden darf, und k als gesuchte Cliquengröße. (G', v, k) ist eine gültige Eingabe für CLIQUE-NOMEMBER und in polynomieller Zeit berechenbar.

Wir zeigen nun: G hat eine k -Clique genau dann, wenn G' eine k -Clique ohne v beinhaltet.

$\Rightarrow$:

Sei (G, k) eine Ja-Instanz des CLIQUE Problems. Dann enthält G eine k -Clique C . Dann ist C auch eine k -Clique in G' , da bei der Abbildung keine Kanten entfernt wurden. Da $v \notin V$, enthält C den Knoten v nicht. Damit ist C eine k -Clique in G ohne den Knoten v . (G', v, k) ist also eine Ja-Instanz des CLIQUE-NOMEMBER Problems.

$\Leftarrow$:

Sei (G', v, k) eine Ja-Instanz des CLIQUE-NOMEMBER Problems. Dann enthält G' eine k -Clique C mit $v \notin C$. Da bei der Abbildung an dem Graphen nichts geändert wurde, außer der Knoten v hinzugefügt, muss C auch eine k -Clique in G sein. Damit ist (G, k) eine Ja-Instanz des CLIQUE Problems.

Also existiert eine polynomielle Reduktion von CLIQUE auf CLIQUE-NOMEMBER. Da CLIQUE **NP**-vollständig ist und CLIQUE-NOMEMBER $\in$ **NP** nach Aufgabenstellung gilt, ist somit CLIQUE-NOMEMBER **NP**-vollständig.

Präsenzaufgabe 11.3 (NP-Vollständigkeit)

Für das Problem SUBSET SUM CARDINALITY seien n ganze Zahlen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ (wobei n gerade sei) sowie eine Zahl $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gegeben. Es soll entschieden werden, ob es eine Teilmenge $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ gibt mit $|S| = n/2$ und $\sum_{i \in S} c_i = K$.

Zeigen Sie, dass das Problem SUBSET SUM CARDINALITY **NP**-vollständig ist. Sie können davon ausgehen, dass SUBSET SUM CARDINALITY $\in$ **NP** ist.

Lösung. Subset Sum Cardinality ist NP-schwer:

SUBSET SUM Problem: Gegeben: n ganze Zahlen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und Zahl $K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Frage: Gibt es eine Teilmenge $S \subseteq \{0, \dots, n\}$ mit $\sum_{i \in S} c_i = K$?

Reduktion: Sei $I = (c_1, \dots, c_n, K)$ eine Eingabe für das SUBSET SUM Problem. Definiere $c'_i := c_i + 1$ für $i \leq n$ und $c'_i := 1$ für $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$. Wir definieren die Eingabe für das Problem SUBSET SUM CARDINALITY als $I' = (c'_1, \dots, c'_{2n}, K+n)$.

Wir zeigen nun: Es gibt eine Lösung für I genau dann, wenn es eine Lösung für I' gibt.

$\Rightarrow$:

Sei I eine Ja-Instanz des SUBSET SUM Problems. Dann gibt es eine Menge $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $\sum_{i \in S} c_i = K$. Es gilt also $\sum_{i \in S} c'_i = \sum_{i \in S} (c_i + 1) = K + |S|$. Sei nun $S' = \{n+1, \dots, 2n - |S|\}$. Es gilt $|S \cup S'| = n$ und $\sum_{i \in S \cup S'} c'_i = \sum_{i \in S} c'_i + \sum_{i \in S'} c'_i = \sum_{i \in S} (c_i + 1) + \sum_{i \in S'} 1 = K + |S| + (n - |S|) = K + n$. $S \cup S'$ ist also eine Lösung für I' und I' damit eine Ja-Instanz.

$\Leftarrow$:

Es sei I' eine Ja-Instanz. Dann gibt es also eine Menge $S' \subseteq \{1, \dots, 2n\}$ mit $\sum_{i \in S'} c'_i = K + n$ und $|S'| = n$. Sei $S := S' \cap \{1, \dots, n\}$. Es gilt $\sum_{i \in S'} c'_i - \sum_{i \in S} c'_i = n - |S|$, da die Items in $\{n+1, \dots, 2n\}$ das Gewicht 1 haben, und genau $n - |S|$ Items übrig sind. Damit gilt $\sum_{i \in S} (c_i + 1) = \sum_{i \in S} c'_i = K + n - (n - |S|) = K + |S|$, woraus folgt, dass $\sum_{i \in S} c_i = K$. Damit ist S eine Lösung für I und somit I eine Ja-Instanz.

Laufzeit: Die Reduktion kann naiv in einer Zeit von $O(n)$ implementiert werden. Das ist eine polynomielle Laufzeit.

Also existiert eine polynomielle Reduktion von SUBSET SUM auf SUBSET SUM CARDINALITY. Da nach Skript SUBSET SUM **NP**-vollständig ist und SUBSET SUM CARDINALITY $\in$ **NP** nach Aufgabenstellung gilt, ist somit SUBSET SUM CARDINALITY **NP**-vollständig.