



CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

Institut für Informatik, Arbeitsgruppe Theoretische Informatik
Dr. Max A. Deppert, Janina Reuter, Annika Huch

06.07.2026

Präsenzaufgaben zur Vorlesung »Analyse von Algorithmen und Komplexität«

Blatt 13

Präsenzaufgabe 13.1

Im Folgenden sollen Sie herausfinden (und begründen), welche Lower Bounds sich über ETH und die Reduktionen aus der Vorlesung ergeben. Nutzen Sie hierfür auch das Sparsification Lemma.

Welche Schranken für die Laufzeit in Abhängigkeit von den natürlichen Parametern (Anzahl Knoten, Anzahl Kanten, Anzahl Items, Anzahl unterschiedlicher Items, Anzahl Tripel, Kardinalität der Grundmenge, Anzahl unterschiedlicher Tripel, Anzahl unterschiedlicher auftretender Zahlen, größte auftretende Zahl, ...) ergeben sich jeweils aus folgenden (zum Großteil aus der Vorlesung bekannten) Reduktionen (Laufzeitfaktoren, die polynomiell in der Eingabekodierung sind, dürfen vernachlässigt werden)?

Schätzen Sie dazu zunächst die verschiedenen Parameter der resultierenden Instanz mithilfe der Parameter der eingegebenen Instanz geeignet ab.

1. $3\text{-SAT} \leq k\text{-CLIQUE}$
2. $k\text{-CLIQUE} \leq k\text{-INDEPENDENTSET}$ (Problemdefinition für die Antwort nicht relevant; in der Reduktion wird der Graph $G = (V, E)$ auf den Komplementgraph $(V, \bar{E})$ abgebildet)
3. $\text{SAT} \leq 3\text{-DIMENSIONALMATCHING}$ (Hinweis: $3\text{-SAT} \subseteq \text{SAT}$)
4. $3\text{-DIMENSIONALMATCHING} \leq 3\text{-EXACTCOVER}$
5. $3\text{-EXACTCOVER} \leq \text{SUBSETSUM}$

Lösung. Angenommen ETH gilt. Das Sparsification Lemma impliziert, dass man 3-SAT nicht in $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ lösen kann.

1. In der Reduktion werden $|V| = O(m)$ Knoten und $|E| = O(m^2)$ Kanten erstellt und $k = m$. Außerdem gilt $n \leq 3m \in O(m)$.
 - Lower bound bzgl. der Anzahl an Knoten: $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der $k\text{-CLIQUE}$ in $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Dann gibt es auch einen Algorithmus, der 3-SAT in $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion auf $k\text{-CLIQUE}$ + $k\text{-CLIQUE}$ Algorithmus). Nach dem Sparsification Lemma gibt es dies nur, wenn die ETH nicht gilt.

- Lower bound bzgl. der Anzahl an Kanten: $2^{o(\sqrt{|E|})} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der k -Clique in $2^{o(\sqrt{|E|})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Da $|E| \in O(m^2)$, gibt es dann auch einen Algorithmus, der 3-SAT in $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion auf k -Clique + k -Cliques Algorithmus). Nach dem Sparsification Lemma gibt es dies nur, wenn die ETH nicht gilt.
 - Lower bound bzgl. k : $2^{o(k)} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der k -Clique in $2^{o(k)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Dann gibt es auch einen Algorithmus, der 3-SAT in $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion auf k -Clique + k -Cliques Algorithmus). Nach dem Sparsification Lemma gibt es dies nur, wenn die ETH nicht gilt.
2. In der Reduktion werden genau $|V|$ Knoten und maximal $|E| = O(|V|^2)$ Kanten erstellt.
- Lower bound bzgl. der Anzahl an Knoten: $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der k -Independent-Set in $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Dann gibt es auch einen Algorithmus, der k -Clique in $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion auf k -Independent-Set + k -Independent-Set Algorithmus). Nach Aufgabenteil 1, gibt es diesen nur, wenn die ETH nicht gilt.
 - Lower bound bzgl. der Anzahl an Kanten: $2^{o(\sqrt{|E|})} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der k -Independent-Set in $2^{o(\sqrt{|E|})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Da $|E| \leq |V|^2$, gibt es dann auch einen Algorithmus, der k -Clique in $2^{o(|V|)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion auf k -Independent-Set + k -Independent-Set Algorithmus). Nach Aufgabenteil 1, gibt es diesen nur, wenn die ETH nicht gilt.
3. In der Reduktion werden Mengen mit $|U| = |V| = |W| = O(mn)$ Elementen erstellt und $|T| = O(m^2n^2)$ Tupel. Es gilt $n \leq 3m \in O(m)$ für 3-SAT.
- Lower bound bzgl. der Anzahl an Elementen: $2^{o(\sqrt{|V|})} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der 3-Dimensional-Matching in $2^{o(\sqrt{|V|})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Da $|V| \in O(mn) \leq O(m^2)$, gibt es dann auch einen Algorithmus, der 3-SAT in $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion von SAT auf 3-Dimensional-Matching angewandt auf 3-SAT Instanzen + 3-Dimensional-Matching Algorithmus). Nach dem Sparsification Lemma geht dies nur, wenn die ETH nicht gilt.
 - Lower bound bzgl. der Kardinalität von T : $2^{o(\sqrt[4]{|T|})} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der 3-Dimensional-Matching in $2^{o(\sqrt[4]{|T|})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Da $|T| \in O(m^2n^2) \leq O(m^4)$, gibt es dann auch einen Algorithmus, der 3-SAT in $2^{o(m)} \cdot |I|^{O(1)}$ löst (Reduktion von SAT auf 3-Dimensional-Matching angewandt auf 3-SAT Instanzen + 3-Dimensional-Matching Algorithmus). Nach dem Sparsification Lemma geht dies nur, wenn die ETH nicht gilt.
4. Das 3-dimensionale Matching ist ein Spezialfall vom 3-Exact Cover. Daher gelten die Lower Bounds von 3-dimensionalem Matching auch für 3-Exact Cover. Da $|U| = 3m \in O(|V|)$, ergibt sich, dass es für 3-Exact Cover unter der ETH keinen Algorithmus mit Laufzeit $2^{o(\sqrt{m})} \cdot |I|^{O(1)}$ geben kann, da sonst 3-dimensionales Matching in $2^{o(\sqrt{|V|})} \cdot |I|^{O(1)}$ lösbar wäre. Und da $|F| = |T|$, ergibt sich, dass es für 3-Exact Cover unter der ETH keinen Algorithmus mit Laufzeit $2^{o(\sqrt[4]{|F|})} \cdot |I|^{O(1)}$ geben kann, da sonst 3-dimensionales Matching in $2^{o(\sqrt[4]{|T|})} \cdot |I|^{O(1)}$ lösbar wäre.
5. In der Reduktion wird $n = |F|$ gesetzt. Lower bound bzgl. n : $2^{o(\sqrt[4]{n})} \cdot |I|^{O(1)}$
Angenommen, es existiert ein Algorithmus, der SubsetSum in $2^{o(\sqrt[4]{n})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Dann

gibt es auch einen Algorithmus, der 3-Exact Cover in $2^{o(\sqrt[4]{|F|})} \cdot |I|^{O(1)}$ löst. Nach Aufgabenteil 4, gibt es diesen nur, wenn die ETH nicht gilt. $\square$